

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/16-55

Ссылка для цитирования этой статьи:

Попова А.А. Математическое моделирование гидроупругих колебаний стенок канала, установленного на упругом основании // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №4

УДК 532.517.2:539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ СТЕНОК КАНАЛА, УСТАНОВЛЕННОГО НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Попова А.А.¹

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, anay_p@bk.ru

MATHEMATICAL MODELING OF HYDROELASTIC WALLS OSCILLATIONS OF A CHANNEL RESTING ON ELASTIC FOUNDATION

Popova A.A.¹

¹Yuri Gagarin state technical university of Saratov,
Saratov, Russia, anay_p@bk.ru

Аннотация. Предложена математическая модель для исследования колебаний упругих стенок щелевого канала, установленного на упругом основании Винклера. Канал образован двумя параллельными жестко заземленными пластинами и заполнен вязкой пульсирующей жидкостью. Рассмотрена плоская задача для режима установившихся гармонических колебаний и осуществлен переход к одномассовой модели. Найден закон изменения давления жидкости в канале и колебаний его стенок.

Ключевые слова: вибрирующий штамп, пластина, гидроупругие колебания, упругое основание, вязкая жидкость.

Abstract. A mathematical model was proposed to study the elastic walls oscillations of a narrow channel resting on Winkler foundation. The channel is formed by two parallel clamped plates and filled with viscous pulsating fluid. The plane problem was considered for the steady-state harmonic regime and the conversion to spring-mass system was made. The liquid pressure law in the channel and the laws of elastic channel walls oscillations are obtained.

Keywords: vibrating stamp, plate, hydroelastic oscillations, elastic foundation, viscous liquid.

Математическое моделирование проблем взаимодействия жидкости с ограничивающими ее стенками является важным направлением современной механики [1-5]. Если ограничиться рассмотрением стенок каналов, образованными пластинами или балками, можно выделить два направления: в

рамках первого жидкость рассматривается как идеальная, а в рамках второго как вязкая. Например, в [6] изучены колебания стенки-балки, взаимодействующей с идеальной жидкостью применительно к гильзе двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением. В [7] рассмотрены колебания пластины, погруженной в идеальную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью, а в [8] вынужденные гидроупругие колебания пластины при ее взаимодействии с вибратором. В [9-13] изучены собственные и хаотические колебания пластин в неподвижной идеальной жидкости или ее потоке. В [14-16] рассмотрены вопросы динамики и устойчивости пластины, как элемента проточного канала, при ее взаимодействии с идеальной жидкостью (газом).

С другой стороны, в [17] исследованы колебания бесконечной балки на слое вязкой жидкости, а в [18] колебания упруго закрепленной твердой стенки щелевого канала конечных размеров. В [19] изучаются колебания консольной балки в вязкой несжимаемой жидкости, а в [20] в ее потоке применительно к пьезоэлементу. В [21-23] рассмотрены вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости в узком и клиновидном каналах с учетом упругих свойств одной из их стенок. В [24-29] исследованы гидроупругие колебания стенок узких каналов с вязкой несжимаемой жидкостью, образованные дисками и пластинами. Однако, в вышеуказанных работах не учтено влияние упругих свойств оснований каналов. В [30] предложена математическая модель колебаний мембраны, взаимодействующей с идеальной жидкостью, и установленной на основании Винклера, а в [31-33] предложены модели гидроупругого взаимодействия идеальной жидкости и прямоугольных пластин на основании Пастернака. В [34-38] изучены проблемы гидроупругости пластины на основании Винклера, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости, в [39, 41] предложена модель для изучения гидроупругих колебаний упругого цилиндра, образующего стенку кольцевого канала с вязкой жидкостью, и окруженного средой Винклера. Однако, в указанных выше работах, не рассмотрены колебания двух жестко защемленных на торцах пластин, образующих стенки узкого канала, установленного на упругом основании.

Рассмотрим следующую схему щелевого канала, образованного двумя параллельными упругими пластинами 1 и 2, жестко защемленными на торцах (см. рис. 1). Будем полагать, что нижняя пластина 2 установлена на упругом основании Винклера. Канал, полностью заполнен пульсирующей вязкой несжимаемой жидкостью 3. Декартову систему координат Oxz свяжем со срединной поверхностью нижней пластины. Будем рассматривать только установившиеся изгибные колебания пластин и считать, что давление на торцах канала изменяется по заданному гармоническому закону $p(t) = p_m \exp(i\omega t)$, где p_m – амплитуда пульсаций давления, ω – частота, t – время. Пластины 1 и 2 имеют геометрические размеры в плане $2\ell \times b$, а их толщины h_{01} и h_{02} . При этом $b \gg 2\ell$, т.е. рассмотрим плоскую задачу. Жидкость полностью заполняет канал толщиной $\delta_0 \ll \ell$. Амплитуды прогибов пластин w_{1m} и w_{2m} значительно меньше

δ_0 . Истечение жидкости на торцах канала можно считать свободным в ту же среду с постоянным давлением p_0 .

В рассматриваемой постановке, осуществим переход от рассмотрения пластин к одномассовой модели каждой из них согласно подходу, предложенному в [3, 42], т.е. рассмотрим канал с двумя твердыми стенками, имеющими эквивалентную массу $m_{1э}$, $m_{2э}$ и подвешенными на пружинах с эквивалентной жесткостью $n_{1э}$ и $n_{2э}$.

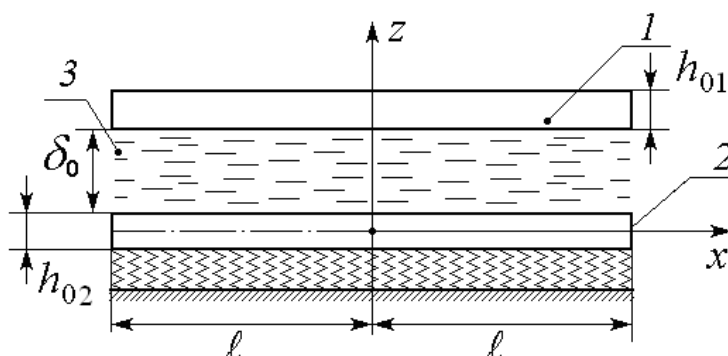


Рис. 1.

В результате, получаем задачу колебаний стенок канала, взаимодействующих с пульсирующей вязкой жидкостью, включающую в себя:

- уравнения динамики стенок канала

$$\begin{aligned} m_{1э} \ddot{z}_1 + n_{1э} z_1 &= F, \\ m_{2э} \ddot{z}_2 + n_{2э} z_2 &= -F, \end{aligned} \quad (1)$$

- уравнения динамики сильновязкой несжимаемой жидкости [1-4]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

здесь F – сила давления жидкости, $z_1 = z_{1m} f_1(\omega t)$, $z_2 = z_{2m} f_2(\omega t)$ – законы перемещений одномассовых моделей, моделирующих прогибы пластин; z_{1m} , z_{2m} – амплитуды перемещений; p – закон изменения давления в тонком слое жидкости вдоль канала; u_x , u_z – проекции вектора скорости жидкости на оси координат; p – давление; ρ – плотность жидкости; ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Сила давления жидкости имеет вид:

$$F = b \int_{-l}^l p dx. \quad (3)$$

Рассматривая одномассовые системы будем полагать, что центр ранее введенной системы координат смещен на поверхность нижней пластины

(твердой стенки), взаимодействующей с жидкостью. При этом уравнения (3) дополняются граничными условиями прилипания жидкости к стенкам канала и давления на его торцах:

$$\begin{aligned} u_x &= 0, u_z = \dot{z}_1 \text{ при } z = \delta_0 + z_{1m}f_1(\omega t), \\ u_x &= 0, u_z = \dot{z}_2 \text{ при } z = z_{2m}f_2(\omega t), \\ p &= p_0 \text{ при } x = \pm \ell. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения для эквивалентной массы и жесткости могут быть получены из условий равенства кинетических энергий упругой и жесткой пластины, а также совпадения максимального статического прогиба пластины при действии равномерно распределенной нагрузки, эквивалентной силе 1 Н, с перемещением одномассовой системы [3, 42]. Данные условия приводят к следующим выражениям:

$$m_{iэ} = \frac{\rho_{0i} b h_{0i} \int_{-\ell}^{\ell} w_i^2(x) dx}{w_{ia}^2}, \quad n_{iэ} = \frac{1}{w_{i\max}}, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

где ρ_{0i} – плотность материала i -ой пластины; $w_i(x)$ – форма прогиба i -ой пластины; w_{ia} – прогиб в точке центра масс i -ой пластины $x = 0$.

Исходя из условий торцевого закрепления пластин, зададим форму их прогиба в виде

$$w_i = w_{i\max} \left(1 - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right)^2. \quad (6)$$

Применяя метод Бубнова-Галеркина в первом приближении, определим прогибы пластин при равномерно распределенной нагрузке, а затем по (5) получим:

$$m_{iэ} = \frac{256}{315} \rho_{0i} h_{0i} b \ell, \quad n_{iэ} = \frac{48bD_i}{\ell^3} \left(1 + \frac{\chi \ell^4}{D_i} \frac{2}{63} \right), \quad (7)$$

где $D_i = \frac{E_i h_{0i}^3}{12(1 - \mu_i^2)}$ – цилиндрическая жесткость i -ой пластины; E_i – модуль

Юнга материала i -ой пластины; μ_i – коэффициент Пуассона материала i -ой пластины.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и малые параметры задачи

$$\begin{aligned} \tau &= \omega t, \quad \xi = x/\ell, \quad \zeta = z/\delta_0, \quad u_z = z_{1m} \omega U_\zeta, \quad u_x = z_{1m} \omega U_\xi / \psi, \\ p &= p(\tau) + p_0 + \frac{\rho v z_{1m} \omega}{\delta_0 \psi^2} P, \quad \psi = \delta_0 / \ell \ll 1, \quad \lambda = z_{1m} / \delta_0 \ll 1, \quad z_{2m} / z_{1m} = O(1). \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая (8) в (2)-(4) получаем, с точностью до ψ и λ , следующую краевую задачу гидродинамики тонкого слоя сильно вязкой жидкости:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0,$$

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df_1}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1, \quad (9)$$

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{z_{2m}}{z_{1m}} \frac{df_2}{d\tau} \text{ при } \zeta = 0,$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = \pm 1.$$

Решая (9), а затем, возвращаясь к размерным переменным, представим давление жидкости в канале в виде

$$p = p_0 + p(t) + \frac{6\ell^2 \rho \nu}{\delta_0^3} \left(\left(\frac{x}{\ell} \right)^2 - 1 \right) (\dot{z}_1 - \dot{z}_2). \quad (10)$$

Учитывая (10) в (3) получаем выражение для силы, действующей со стороны жидкости на стенки канала:

$$F = 2\ell b(p_0 + p(t)) + K\dot{z}_2 - K\dot{z}_1, \quad K = \frac{8\ell^3 b \rho \nu}{\delta_0^3}, \quad (11)$$

где K – коэффициент демпфирования слоя вязкой жидкости, находящейся в канале между вибрирующим штампом и пластиной.

Подставляя силу (11) в уравнения динамики стенок канала (1) получаем

$$m_{1_3} \ddot{z}_1 + K\dot{z}_1 + n_{1_3} z_1 - K\dot{z}_2 = 2\ell b(p_0 + p(t)),$$

$$m_{2_3} \ddot{z}_2 + K\dot{z}_2 + n_{2_3} z_2 - K\dot{z}_1 = -2\ell b(p_0 + p(t)). \quad (12)$$

Решение (12) для установившихся гармонических колебаний имеет вид

$$z_1 = 2\ell b \left[\frac{p_0}{n_{1_3}} + p_m A_1(\omega) e^{i(\omega t + \varphi(\omega))} \right],$$

$$z_2 = -2\ell b \left[\frac{p_0}{n_{1_3}} + p_m A_2(\omega) e^{i(\omega t + \varphi(\omega))} \right],$$

$$A_1(\omega) = \frac{n_{2_3} - m_{2_3} \omega^2}{\sqrt{((n_{1_3} - m_{1_3} \omega^2)(n_{2_3} - m_{2_3} \omega^2) - K^2 \omega^2)^2 + K^2 \omega^2 (n_{1_3} + n_{2_3} - \omega^2 (m_{1_3} + m_{2_3}))^2}}, \quad (13)$$

$$A_2(\omega) = \frac{n_{1_3} - m_{1_3} \omega^2}{\sqrt{((n_{1_3} - m_{1_3} \omega^2)(n_{2_3} - m_{2_3} \omega^2) - K^2 \omega^2)^2 + K^2 \omega^2 (n_{1_3} + n_{2_3} - \omega^2 (m_{1_3} + m_{2_3}))^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{K \omega (\omega^2 (m_{1_3} + m_{2_3}) - (n_{1_3} + n_{2_3}))}{(n_{1_3} - m_{1_3} \omega^2)(n_{2_3} - m_{2_3} \omega^2) - K^2 \omega^2} \right).$$

Здесь $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ – амплитудно-частотные характеристики стенок канала, $\varphi(\omega)$ – фазовые частотные характеристики стенок канала.

В результате, построена математическая модель для исследования гидроупругих колебаний жесткозащемленных стенок щелевого канала, заполненного пульсирующей вязкой жидкостью и установленного на упругое

основание Винклера. В рамках полученной модели возможно определение амплитуд гидроупругих колебаний пластин-стенок канала, а также давления в слое вязкой жидкости. Построенные амплитудные частотные характеристики позволяют находить резонансные частоты и соответствующие им амплитуды колебаний.

Кроме того, построенные в работе амплитудно-частотные и фазовые частотные характеристики пластин могут быть применены для создания алгоритмов и программных методов неразрушающего контроля физических свойств стенок канала и упругого основания по параметрам вынужденных колебаний стенок канала, установленного на исследуемом основании.

Литература

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.
2. Морозов В.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Математическое моделирование сложных аэроупругих систем. М.: Физматлит, 1995. 736 с.
3. Могилевич Л.И., Попов В.С. Прикладная гидроупругость в машино- и приборостроение. Саратов: Саратовский ГАУ, 2003. 156 с.
4. Могилевич Л.И., Попов В.С., Христофорова А.В. Математические вопросы гидроупругости трехслойных элементов конструкций. Саратов: Изд-во КУБиК, 2012. 123 с.
5. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск, 2009. 220 с.
6. Индейцев Д.А., Полипанов И.С., Соколов С.К. Расчет кавитационного ресурса втулки судовых двигателей // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. №4. С.59-64.
7. Haddara M.R., Cao S.A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates // Marine Structures. 1996. V. 9. No. 10. P. 913-933. DOI: 10.1016/0951-8339(96)00006-8.
8. Chapman C.J., Sorokin S.V. The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading // Journal of Sound and Vibration. 281. (2005). P. 719-741. DOI: 10.1016/j.jsv.2004.02.013.
9. Ergin A., Ugurlu B. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid // Journal of Fluids and Structures. 2003. Vol. 17. No.7. P. 927-939. DOI: 10.1016/S0889-9746(03)00050-1.
10. Kramer, M.R., Liu, Z., Young, Y.L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water // Composite Structures. 2013. Vol. 95. P. 254-263. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.07.017
11. Kerboua Y., Lakis, A.A. Thomas M., Marcouiller L. Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid // Applied Mathematical Modelling. 2008. Vol. 32. No. 12. P. 2570-2586. DOI: 10.1016/j.apm.2007.09.004.

12. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenکو V.P. Hydroelastic Stability of a Rectangular Plate Interacting with a Layer of Ideal Flowing Fluid // Fluid Dynamics. 2016. Vol. 51. No. 6. P. 821- 833. DOI: 10.1134/S0015462816060132.
13. Avramov K.V., Strel'nikova E.A. Chaotic oscillations of plates interacting on both sides with a fluid flow // International Applied Mechanics. 2014. Vol. 50. No. 3. P. 303-309. DOI: 10.1007/s10778-014-0633-y.
14. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента проточного канала // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18. № 1. С. 94-107.
15. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Динамическая устойчивость упругого элемента проточного канала // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2014. № 3 (31). С. 40-55.
16. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Математическая модель вибрационного устройства // Автоматизация процессов управления. 2014. № 3 (37). С. 58-67.
17. Önsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // Journal of Sound and Vibration. 1993. V. 163. No. 2. P. 231-259. DOI: 10.1006/jsvi.1993.1162.
18. Ageev R. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Kondratov D. V. Mathematical Model of Pulsating Viscous Liquid Layer Movement in a Flat Channel with Elastically Fixed Wall // Applied Mathematical Sciences. 2014. Vol. 8. No. 159. P. 7899-7908. DOI: 10.12988/ams.2014.410795.
19. Faria Cassio T., Inman Daniel J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler-Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mechanical Systems and Signal Processing. 2014. Vol. 45. No. 2. P. 317-329. DOI: 10.1016/j.ymssp.2013.12.003.
20. Akcabay D.T., Young Y.L., Hydroelastic Response and Energy Harvesting Potential of Flexible Piezoelectric Beams in Viscous Flow // Physics of Fluids. 2012. Vol. 24. No. 5. DOI: 10.1063/1.4719704.
21. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78.
22. Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N. Mathematical modeling of elastically fixed wall longitudinal oscillations of wedge-shaped channel under foundation vibration // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2016. Т. 12. № 4. С. 9-17.
23. Popov V.S., Popova A.A., Sokolova D.L. Mathematical modeling of longitudinal oscillations tapered narrow channel wall under pulsating pressure of highly viscous liquid // Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. № 53. С. 2627-2635.
24. Могилевич Л.И., Попов В.С. Исследование взаимодействия слоя вязкой

- несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2011. № 3. С. 42-55.
25. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдвливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №4. С. 23-32.
26. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 17-35. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.02.
27. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 3-11.
28. Могилевич Л.И., Попов В.С., Скородумов Е.С. Динамика сдвливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости, взаимодействующего с упругой пластиной // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. № 1.
29. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Скородумов Е.С. Математическое моделирование динамики взаимодействия слоя вязкой жидкости с упругим трехслойным статором и абсолютно твердым вибратором опоры // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. С. 16-23.
30. Alekseev V.V., Indeitsev D.A., Mochalova Yu.A. Resonant oscillations of an elastic membrane on the bottom of a tank containing a heavy liquid // Technical Physics. 1999. Vol. 44. No. 8, p. 903-907.
31. Hosseini-Hashemi, S., Karimi, M., Hossein Rokni, D.T. Hydroelastic vibration and buckling of rectangular Mindlin plates on Pasternak foundations under linearly varying in-plane loads // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2010. Vol. 30. No. 12. P. 1487-1499. DOI: 10.1016/j.soildyn.2010.06.019.
32. Kutlu A., Ugurlu B., Omurtag M.H., Ergin A. Dynamic response of Mindlin plates resting on arbitrarily orthotropic Pasternak foundation and partially in contact with fluid // Ocean Engineering. 2012. Vol. 42. P. 112-125. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2012.01.010.
33. Ugurlu, B., Kutlu, A., Ergin, A., Omurtag, M.H. Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid // Journal of Sound and Vibration. 2008. Vol. 317 No.1-2. P. 308-328. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.03.022.
34. Kuznetsova E.L., Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N. Mathematical model of the plate on elastic foundation interacting with pulsating viscous liquid layer // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10. No 23. P. 1101-

1109. DOI: 10.12988/ams.2016.6242.
35. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol. 46. No 1. P. 12-19. DOI:10.3103/S1052618817010113.
36. Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Christoforova A. V. Mathematical modeling of highly viscous liquid dynamic interaction with walls of channel on elastic foundation // IEEE Conference 2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Omsk, 2016). DOI: 10.1109/Dynamics.2016.7819051.
37. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Christoforova A.V. Mathematical Modeling of Hydroelastic Walls Oscillations of the Channel on Winkler Foundation Under Vibrations // Vibroengineering PROCEDIA, Vol. 8, 2016, p.294-299.
38. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование динамики взаимодействия сильновязкой жидкости со стенками канала, установленного на упругом основании // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. Т. 3. № 1. С. 350-354.
39. Mogilevich L.I., Popov V.S. Mathematical modeling of incompressible viscous liquid layer interaction dynamics in an annular slit with its wall, surrounded by elastic medium // IEEE Conference 2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Omsk, 2016). DOI: 10.1109/Dynamics.2016.7819050.
40. Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическое моделирование динамики взаимодействия слоя вязкой жидкости в кольцевой щели со стенкой, окруженной упругой средой // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. Т. 3. № 1. С. 346-350.
41. Mogilevich L.I., Popov V.S., Kondratov D.V., Rabinskiy L.N. Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator // Journal of Vibroengineering. 2017. Vol. 19. Issue 8. P. 5758-5766.
42. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2004. № 5. С. 179-190.