

УДК 51-74

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТРЕХ УПРУГИХ СООСНЫХ  
ОБОЛОЧЕК, СВОБОДНО ОПЕРТЫХ НА КОНЦАХ,  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ДВУМЯ ПУЛЬСИРУЮЩИМИ СЛОЯМИ  
ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩИХСЯ МЕЖДУ НИМИ ПРИ ПУЛЬСАЦИИ  
ДАВЛЕНИЯ**

Елистратова О.В.<sup>1</sup>, Кондратов Д.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал  
Российской академии народного хозяйства и государственной службы при  
Президенте Российской Федерации, Саратов, Россия

<sup>2</sup>Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал  
Российской академии народного хозяйства и государственной службы при  
Президенте Российской Федерации, Саратов, Россия

**MODELING OF DYNAMICS OF THREE SIMPLY SUPPORTED  
ELASTIC COAXIAL SHELLS, INTERACTING WITH TWO PULSING  
LAYERS OF LIQUID, BEING BETWEEN THEM AT PRESSURE  
PULSATION**

Elistratova O.V.<sup>1</sup>, Kondratov D.V.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Volga Management Institute named after P.A. Stolypin - a branch of Federal  
State-Funded Educational Institution of Higher Education Russian Presidential  
Academy of National Economy and Public Administration, Saratov, Russia

<sup>2</sup>Volga Management Institute named after P.A. Stolypin - a branch of Federal  
State-Funded Educational Institution of Higher Education Russian Presidential  
Academy of National Economy and Public Administration, Saratov, Russia

В статье рассмотрено математическое моделирование гидроупругости тройной соосной упругой трубы взаимодействующей с двумя пульсирующими слоями вязкой несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: математическое моделирование, соосные оболочки, гидроупругость.

This article discusses the mathematical modelling of hydroelasticity triple coaxial elastic tubes interacting with two pulsating layers of a viscous incompressible fluid.

Keywords: mathematical modeling, coaxial shell, hydroelasticity.

Перспективным направлением в мировой промышленности для повышения эксплуатационных свойств различных конструкций является применение элементов в виде тонкостенных оболочек взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью [1]. Использование таких конструкций позволяет обеспечить необходимую прочность при уменьшении веса и габаритов деталей, снижение и выравнивание динамических воздействий и уровня вибраций, уменьшение трения и изнашивания, охлаждения. В связи с этим наибольший теоретический и практический интерес представляет изучение сложных механических систем, которые представлены тремя оболочками

цилиндрической формы, заключенных одна в другую, с находящейся между ними жидкостью. Ранее были проведены исследования динамики поведения двух упругих соосных оболочек, причем оболочки могли быть как геометрически регулярные, так и геометрически нерегулярные [2-7]. Вместе с тем процесс создания математической модели, позволяющей исследовать динамические процессы в указанной системе с учетом воздействия перепада давления является достаточно сложным, что в конечном итоге и определило актуальность проведения данного исследования.

Рассмотрим общую механическую модель, исследуемой системы (рис. 1).

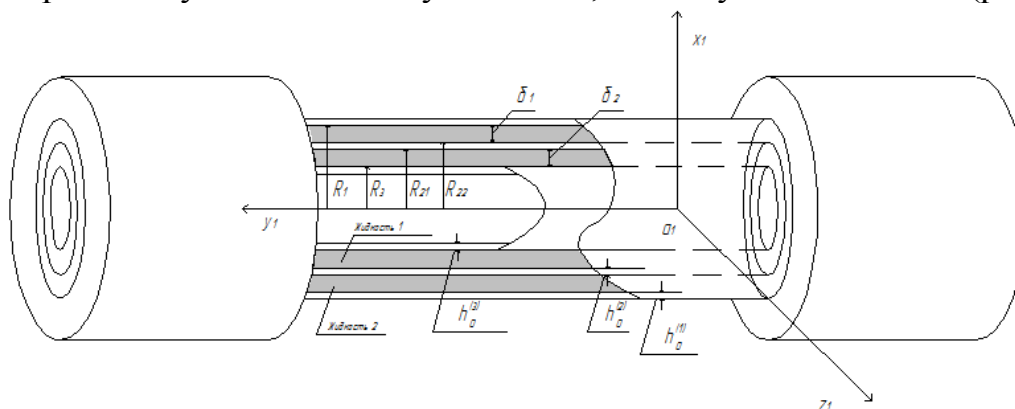


Рис. 1.

Представленная выше система состоит из внешней оболочки 1, средней оболочки 2 и внутренней оболочки 3 и которые являются упругими цилиндрическими оболочками, свободно опертыми на концах.

Внутренний радиус внешней оболочки обозначим  $R_1$ , а внешний радиус внутренней оболочки –  $R_3$ , а внешний и внутренний радиус средней оболочки соответственно  $R_{21}$  и  $R_{22}$ . Вязкая несжимаемая жидкость 1 и 2 полностью заполняет зазор между стенками трех оболочек.

Будем предполагать, что радиальный зазор цилиндрической щели в цилиндре 1 –  $\delta_1$  и в цилиндре 2 –  $\delta_2$ .

Перемещение внутренней и средней оболочки относительно внешней на торцах отсутствует. Также перемещение внутренней и средней оболочки относительно друг друга отсутствует. Механическая система считается термостабилизированной.

При исследовании динамики указанной механической системы для слоя жидкости 1, окружающего внешнюю и среднюю оболочку и для слоя жидкости 2, окружающего среднюю и внутреннюю оболочку, принята модель вязкой несжимаемой жидкости.

Жидкость, используемая в реальных механических системах может считаться ньютоновской.

Течение жидкостей между оболочками описывается уравнениями Навье-Стокса, которые в осесимметричном случае имеют вид [3-9]:

$$\frac{\partial V_k^{(i)}}{\partial t} + V_r^{(i)} \frac{\partial V_k^{(i)}}{\partial r} + V_y^{(i)} \frac{\partial V_k^{(i)}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho^{(i)}} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial k} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_k^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_k^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_k^{(i)}}{\partial y^2} - \chi \frac{V_r^{(i)}}{r^2} \right),$$

$$\frac{\partial V_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{V_r^{(i)}}{r} + \frac{\partial V_y^{(i)}}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $k = r$  или  $y$ ;  $\chi = 1$  при  $k = r$ ,  $\chi = 0$  при  $k = y$ ;  $V_r^{(i)}, V_y^{(i)}$  – компоненты вектора скоростей жидкости;  $\rho^{(i)}$  – плотность жидкости;  $\nu^{(i)}$  – кинематический коэффициент вязкости;  $y$  – координата вдоль оси симметрии  $Oy$ ;  $r$  – расстояние от оси  $Oy$ ;  $t$  – время;  $i = 1$  – слой жидкости между оболочкой 1 и оболочкой 2;  $i = 2$  – слой жидкости между оболочкой 2 и оболочкой 3.

Граничные условия представляют собой условия прилипания жидкости к поверхностям оболочек и условия для давления на концах механической системы:

$$V_r^{(i)} = \partial u_3^{(i)} / \partial t, \quad V_y^{(i)} = 0 \quad \text{при } r = R_{21}^{(i)} + \delta_1 + u_3^{(i)};$$

$$V_r^{(i)} = \partial u_3^{(i)} / \partial t, \quad V_y^{(i)} = 0 \quad \text{при } r = R_{21}^{(i)};$$

$$p^{(i)} = p^{(i)+} \quad \text{при } y = l/2, \quad p^{(i)} = p^{(i)-} \quad \text{при } y = -l/2, \quad (2)$$

где  $u_3^{(i)}$  – прогиб внешней оболочки;  $u_1^{(i)}$  – продольное перемещение оболочек.

Уравнение динамики оболочек, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява, запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{\mu_0^{(i)}}{R_{21}^{(i)}} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} = E^{(i)} \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} \left[ \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial t^2} - G_1^{(i)} \right],$$

$$-\frac{\mu_0^{(i)}}{R_{21}^{(i)}} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial y} + \frac{u_3^{(i)}}{R_{21}^{(i)}} + (a_0^{(i)})^2 \left[ \left( R_{21}^{(i)} \right)^2 \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial y^4} \right] =$$

$$= \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} \left[ -\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 u_3^{(i)}}{\partial t^2} + G_3^{(i)} \right], \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{\mu_0^{(i)}}{R_{22}^{(i)}} \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial y} = E^{(i)} \frac{1 - (\mu_0^{(i)})^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} \left[ \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial t^2} - G_1^{(i)} \right], \quad (3)$$

$$-\frac{\mu_0^{(i)}}{R_{22}^{(i)}} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial y} + \frac{u_3^{(i)}}{R_{22}^{(i)}} + \left(a_0^{(i)}\right)^2 \left[ \left(R_{22}^{(i)}\right)^2 \frac{\partial^4 u_3^{(i)}}{\partial y^4} \right] =$$

$$= \frac{1 - \left(\mu_0^{(i)}\right)^2}{E^{(i)} h_0^{(i)}} \left[ -\rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 u_3^{(i)}}{\partial t^2} + G_3^{(i)} \right], i = 1, 2, 3,$$

где верхний индекс 1 относится к внешней оболочке, а индекс 2 – к средней оболочке и индекс 3 – к внутренней оболочке;  $\mu_0^{(i)}$  – модуль Юнга,  $\mu_0^{(i)}$  – коэффициент Пуассона,  $\rho_0^{(i)}$  – плотность материала,  $R^{(i)}$  – радиус срединной поверхности,  $h_0^{(i)}$  – толщина оболочки.

Проекции абсолютного ускорения единицы площади срединной поверхности оболочек, имеют вид:

$$G_1^{(1)} = q_s^{(1)}, G_1^{(2)} = q_{s2}^{(2)} + q_{s1}^{(2)}, G_1^{(3)} = q_3^{(3)}, G_3^{(1)} = -q_n^{(1)}, \quad (4)$$

$$G_3^{(2)} = q_{n2}^{(2)} - q_{n1}^{(2)}, G_3^{(3)} = q_n^{(3)},$$

где  $q$  – напряжения на поверхностях оболочек со стороны слоя жидкости.

Граничные условия для перемещений оболочки состоят в условиях свободного опирания на торцах [5]:

$$\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial y} = u_3^{(i)} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_3^{(i)}}{\partial^2 y} = 0 \quad \text{при } y = \pm \frac{l}{2}. \quad (5)$$

В дальнейшей осуществляется решение поставленной задачи. Сначала решаются задачи гидродинамики в предположении, что упругие перемещения соосных оболочек неизвестны. В результате решения получаются выражения для скоростей жидкости и давления в слое жидкостей в виде интегральных выражений через упругие перемещения оболочек. Найденные выражения позволяют найти напряжения в оболочках со стороны жидкости. Уравнения динамики оболочек решаются методом Бубнова-Галеркина, причем упругие перемещения оболочек будем искать в следующем виде:

$$u_1^{(i)} = u_m^{(i)} U_1^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( u_{110}^{(i)} + u_{11}^{(i)}(\tau) \right) \sin \frac{2k-1}{2} \pi \zeta + \left( u_{120}^{(i)} + u_{12}^{(i)}(\tau) \right) \cos k \pi \zeta \right], \quad (6)$$

$$u_3^{(i)} = w_m^{(i)} U_3^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( u_{310}^{(i)} + u_{31}^{(i)}(\tau) \right) \cos \frac{2k-1}{2} \pi \zeta + \left( u_{320}^{(i)} + u_{32}^{(i)}(\tau) \right) \sin k \pi \zeta \right]$$

В результате решения найдем выражение для прогибов оболочек и, соответственно, амплитудные частотные и фазовые характеристики прогибов оболочек.

Таким образом, исследование математической модели механической системы, состоящей из трех соосных упругих цилиндрических оболочек свободно опертых на концах, взаимодействующих через слои вязкой несжимаемой жидкости при наличии перепада давления, позволит выявить резонансные эффекты в системе «оболочка –жидкость-оболочка-жидкость-оболочка».

*Выполнено при поддержке грантов РФФИ № 15-01-01604-а, № 16-01-00175-а и гранта Президента РФ МД-6012.2016.8.*

### Литература

1. Башта Т.М. Гидропривод и гидропневматика. М : Машиностроение, 1972. 320 с.
2. Кондратов Д.В., Калинина А.В. Исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации// Труды МАИ. 2014. № 78. С. 4.
3. Kondratov D.V., Kondratova J.N., Mogilevich L.I., Rabinsky L.N., Kuznetsova E.L. Mathematical model of elastic ribbed shell dynamics interaction with viscous liquid pulsating layer//Applied Mathematical Sciences. 2015. Т. 9. № 69-72. С. 3525-3531.
4. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С., Симдянкин А.А. Исследование влияния кавитационного износа гильз двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением камаз-740 на их деформацию в блоке // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2007. № 1 (33). С. 120-126.
5. Кондратова Ю.Н., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Гидроупругость трубопровода кольцевого профиля со свободным опиранием при воздействии вибрации // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 4 (62). С. 9-14.
6. Плаксина И.В., Кондратов Д.В., Кузнецова Е.Л. Гидроупругость геометрически нерегулярной оболочки, содержащей слой вязкой жидкости и упругий цилиндр, в условиях гармонического давления// Научные труды SWorld. 2013. Т. 6. № 4. С. 17-20.
7. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Математическое моделирование ламинарного движения жидкости в упругой цилиндрической трубе кольцевого профиля со свободным опиранием по торцам // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. Т. 1. № 1 (37). С. 33-40
8. Могилевич Л.И., Кондратов Д.В., Елистратова О.В., Плаксина И.В. Динамика взаимодействия трех соосных оболочек, свободно опертых на концах, взаимодействующих с пульсирующими слоями вязкой жидкости// Техническое регулирование в транспортном строительстве. – 2015. – № 5(13); URL: [trts.esrae.ru/24-127](http://trts.esrae.ru/24-127) (дата обращения: 21.04.2016).